Selesaikan relasi rekursif berikut dengan metode akar karakteristik

1. $a_1 = a_2 = 1$ dengan $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ untuk $n \geq 3$
Penyelesaian :
Misalkan $a_n = x^n$ dengan $x \neq 0$ sehingga $x^n \neq 0$ dan sekarang kita punya

$$\begin{aligned} & a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ \Leftrightarrow \quad & x^n &= x^{n-1} + x^{n-2} \\ \Leftrightarrow \quad & x^n - x^{n-1} - x^{n-2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - x - 1 &= 0 \ldots (i) \end{aligned}$$

Dari persamaan kuadrat (i) dengan rumus abc diperoleh akar-akar yaitu

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-1) + \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned} \qquad \text{atau} \qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-1) - \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} \\ &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Solusi umum dari relasi rekursif

$$\begin{aligned} a_n &= c_1 x_1^n + c_2 x_2^n \\ &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \end{aligned}$$

Dari syarat awal diperoleh

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) &= 1 \\ (ii) \ldots (c_1 + c_2) + (c_1 - c_2)\sqrt{5} &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_2 &= 1 \\ c_1 \left(\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} \right) + c_2 \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} \right) &= 1 \\ (iii) \ldots 6(c_1 + c_2) + (c_1 - c_2)2\sqrt{5} &= 4 \end{aligned}$$

Dari pers (ii) dan (iii) diperoleh

$$\begin{array}{r|c|rl} (c_1 + c_2) + (c_1 - c_2)\sqrt{5} = 2 & \times 2 & 2(c_1 + c_2) + (c_1 - c_2)2\sqrt{5} & = 4 \\ 6(c_1 + c_2) + (c_1 - c_2)2\sqrt{5} = 4 & \times 1 & 6(c_1 + c_2) + (c_1 - c_2)2\sqrt{5} & = 4 \quad - \\ \cline{3-4} & & -4(c_1 + c_2) & = 0 \\ & & (iv) \ldots c_1 + c_2 & = 0 \end{array}$$

Substitusi pers (iv) ke pers (ii) dan diperoleh

$$\begin{aligned} (-c_2 + c_2) + (-c_2 - c_2)\sqrt{5} &= 2 \\ -2c_2\sqrt{5} &= 2 \\ c_2 &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned} \qquad \text{dan} \qquad \begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 &= -c_2 \\ c_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Jadi solusi relasi rekursif adalah

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n}$$

2. $a_0 = a_1 = 1$ dengan $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ untuk $n \geq 2$
   Penyelesaian :
   Misalkan $a_n = x^n$ dengan $x \neq 0$ sehingga $x^n \neq 0$ dan sekarang kita punya

$$\begin{array}{rrl} & a_n & = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \\ \Leftrightarrow & x^n & = 2x^{n-1} + 3x^{n-2} \\ \Leftrightarrow & x^n - 2x^{n-1} - 3x^{n-2} & = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 2x - 3 & = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+1)(x-3) & = 0 \ldots (i) \end{array}$$

   Dari persamaan kuadrat (i) diperoleh akar-akar yaitu

$$\boxed{(x_1 + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1} \quad \text{atau} \quad \boxed{(x_2 - 3) = 0 \Rightarrow x_2 = 3}$$

   Solusi umum dari relasi rekursif

$$\begin{aligned} a_n &= c_1 x_1^n + c_2 x_2^n \\ &= c_1(-1)^n + c_2(3)^n \end{aligned}$$

   Dari syarat awal diperoleh

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ c_1(-1)^0 + c_2(3)^0 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= 1 \ldots (ii) \end{aligned} \qquad \text{dan} \qquad \begin{aligned} a_1 &= 1 \\ c_1(-1)^1 + c_2(3)^1 &= 1 \\ -c_1 + 3c_2 &= 1 \ldots (iii) \end{aligned}$$

   Dari pers (ii) dan (iii) diperoleh

$$\begin{array}{r|c|rl} c_1 + c_2 = 1 & \times 3 & 3c_1 + 3c_2 & = 3 \\ -c_1 + 3c_2 = 1 & \times 1 & -c_1 + 3c_2 & = 1 \quad - \\ \cline{3-4} & & 4c_1 & = 2 \\ & & c_1 & = \frac{1}{2} \end{array} \qquad \text{dan} \qquad \begin{aligned} c_2 &= 1 - c_1 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Jadi solusi relasi rekursif adalah

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a_n = \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}(3)^n}$$

3. $a_1 = 2; a_2 = 6$ dengan $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ untuk $n \geq 3$
   Penyelesaian :
   Misalkan $a_n = x^n$ dengan $x \neq 0$ sehingga $x^n \neq 0$ dan sekarang kita punya

$$\begin{array}{rr} & a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \\ \Leftrightarrow & x^n - 4x^{n-1} + 4x^{n-2} = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 4x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-2)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & x = 2 \end{array}$$

   Solusi umum dari relasi rekursif

$$\begin{aligned} a_n &= c_0 x_1^n + c_1 n x_1^n \\ &= c_0(2)^n + c_1 n(2)^n \end{aligned}$$

   Dari syarat awal diperoleh

$$a_1 = 2 \qquad \text{dan} \qquad a_2 = 6$$

$$c_0(2)^1 + c_1(1)(2)^1 = 2 \qquad\qquad c_0(2)^2 + c_1(2)(2)^2 = 6$$

$$c_0 + c_1 = 1 \ldots (ii) \qquad\qquad 2c_0 + 4c_1 = 3 \ldots (iii)$$

Dari pers (ii) dan (iii) diperoleh

$$\begin{array}{r|c|rl} c_0 + c_1 = 1 & \times 4 & 4c_0 + 4c_1 & = 4 \\ 2c_0 + 4c_1 = 3 & \times 1 & 2c_0 + 4c_1 & = 3 \\ \cline{3-4} & & 2c_0 & = 1 \\ & & c_0 & = \frac{1}{2} \end{array} \; - \qquad \text{dan} \qquad \begin{aligned} c_1 &= 1 - c_0 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Jadi solusi relasi rekursif adalah

$$a_n = c_0 x_1^n + c_1 n x_1^n \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a_n = \frac{1}{2}(2)^n + \frac{1}{2}(n)(2)^n}$$

4. $a_0 = a_1 = a_2 = 0; a_3 = 5$ dengan $a_n = 10a_{n-1} - 37a_{n-2} + 60a_{n-3} - 36a_{n-4}$ untuk $n \geq 4$
Penyelesaian :
Misalkan $a_n = x^n$ dengan $x \neq 0$ sehingga $x^n \neq 0$ dan sekarang kita punya

$$\begin{aligned} & a_n - 10a_{n-1} + 37a_{n-2} - 60a_{n-3} + 36a_{n-4} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^n - 10x^{n-1} + 37x^{n-2} - 60x^{n-3} + 36x^{n-4} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x^2 - 5x + 6)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-3)^2(x-2)^2 = 0 \end{aligned}$$

Dari persamaan kuadrat (i) diperoleh akar-akar yaitu

$$\boxed{(x_1 - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 2} \quad \text{atau} \quad \boxed{(x_2 - 3) = 0 \Rightarrow x_2 = 3}$$

Solusi umum dari relasi rekursif

$$\begin{aligned} a_n &= c_0 x_1^n + c_1 n x_1^n + c_2 x_2^n + c_3 n x_2^n \\ &= c_0(2)^n + c_1 n(2)^n + c_2(3)^n + c_3 n(3)^n \end{aligned}$$

Dari syarat awal diperoleh

$$\begin{matrix} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_0 + 0(c_1) + c_2 + 0(c_3) = 0 \\ 2c_0 + 2c_1 + 3c_2 + 3c_3 = 0 \\ 4c_0 + 8c_1 + 9c_2 + 18c_3 = 0 \\ 8c_0 + 24c_2 + 27c_2 + 81c_3 = 5 \end{matrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & 9 & 18 \\ 8 & 24 & 27 & 81 \end{bmatrix}}_{\text{Determinan (D)=6}} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Dengan aturan cramer diperoleh

$$\mathrm{D}_{c_0} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 8 & 9 & 18 \\ 5 & 24 & 27 & 81 \end{vmatrix} = 60 \qquad \mathrm{D}_{c_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 8 & 0 & 18 \\ 8 & 24 & 5 & 81 \end{vmatrix} = -60$$

$$\mathrm{D}_{c_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 9 & 18 \\ 8 & 5 & 27 & 81 \end{vmatrix} = 15 \qquad \mathrm{D}_{c_3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 9 & 0 \\ 8 & 24 & 27 & 5 \end{vmatrix} = 10$$

Sehingga sekarang kita punya

$$c_0 = \frac{D_{c_0}}{D} = \frac{60}{6} = 10 \qquad c_2 = \frac{D_{c_2}}{D} = \frac{-60}{6} = -10$$
$$c_1 = \frac{D_{c_1}}{D} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \qquad c_3 = \frac{D_{c_3}}{D} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Jadi solusi relasi rekursif adalah

$$a_n = c_0 x_1^n + c_1 n x_1^n + c_2 x_2^n + c_3 n x_2^n \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a_n = 10(2)^n + \frac{5}{2}(n)(2)^n - 10(3)^n + \frac{5}{3}(n)(3)^n}$$

Selesaikan relasi rekursif berikut dengan fungsi pembangkit!

5. $a_0 = 10; a_1 = 3$ dengan $a_{n-1} = 2a_n + 4^n$ untuk $n \geq 0$

Penyelesaian :

Misal $p(x)$ adalah FPB barisan $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - \frac{1}{2}(4)^n$, maka menurut definisi

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Kalikan kedua ruas bagian relasi rekursif dengan x^n, kemudian jumlahkan kedua ruas untuk $n \geq 2$ (terlanjur kena trap hehe, pakai $n \geq 1$ bisa lebih ringkas) dan diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}a_{n-1} - \frac{1}{2}(4)^n\right) x^n \\
\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) - a_0 - a_1 x &= \frac{1}{2}x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(4x)^n \\
p(x) - 10 - 3x &= \frac{1}{2}x\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1}\right) - a_0\right) - \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n\right) - 1 - 4x\right) \\
p(x) - 10 - 3x &= \frac{1}{2}x\left(p(x) - 10\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-4x} - 1 - 4x\right) \\
p(x) - 10 - 3x &= \frac{1}{2}xp(x) - 5x - \frac{16x^2}{2-8x} \\
\left(1 - \frac{1}{2}x\right)p(x) &= 10 - 2x - \frac{8x^2}{1-4x} \\
\left(1 - \frac{1}{2}x\right)p(x) &= \frac{10 - 42x}{1-4x} \\
p(x) &= \frac{10-42x}{\left(1-\frac{1}{2}x\right)(1-4x)} \\
p(x) &= \frac{\frac{74}{7}}{1-\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{4}{7}}{1-4x} \\
p(x) &= \frac{74}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n - \frac{4}{7}\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n \\
p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{74}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{7}(4)^n\right) x^n
\end{aligned}$$

Karena a_n adalah koefisien x^n dalam $p(x)$ maka penyelesaian relasi rekursif yang dimaksud adalah

$$\boxed{a_n = \frac{74}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{7}(4)^n, \quad \text{untuk } n \geq 0}$$

6. $a_0 = 2; a_1 = 1$ dengan $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n$ untuk $n \geq 0$
Penyelesaian :
Misal $p(x)$ adalah FPB barisan $a_n = -a_{n+2} + 2a_{n+1} + 2^n$, maka menurut definisi

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Kalikan kedua ruas bagian relasi rekursif dengan x^n, kemudian jumlahkan kedua ruas untuk $n \geq 0$ dan diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-a_{n+2} + 2a_{n+1} + 2^n\right) x^n \\
p(x) &= -\frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} + \frac{2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n \\
p(x) &= -\frac{1}{x^2} \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) - a_0 - a_1 x \right) + \frac{2}{x} \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) - a_0 \right) + \frac{1}{1-2x} \\
p(x) &= -\frac{1}{x^2} \left(p(x) - 2 - 1(x)\right) + \frac{2}{x} \left(p(x) - 2\right) + \frac{1}{1-2x} \\
0 &= -x^2 p(x) + 2xp(x) - p(x) + 2 + x - 4x + \frac{x^2}{1-2x} \\
0 &= -(x^2 - 2x + 1)p(x) + 2 - 3x + \frac{x^2}{1-2x} \\
0 &= -(1-x)^2 p(x) + \frac{6x^2 - 7x + 2 + x^2}{1-2x} \\
(1-x)^2 p(x) &= \frac{7x^2 - 7x + 2}{1-2x} \\
p(x) &= \frac{7x^2 - 7x + 2}{(1-x)^2 (1-2x)} \\
p(x) &= -2 \left(\frac{1}{1-x} \right)^2 + \frac{1}{1-2x} + 3 \left(\frac{1}{1-x} \right) \\
p(x) &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 2+n-1 \\ n \end{bmatrix} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-2 \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix} + 2^n + 3 \right) x^n
\end{aligned}$$

Karena a_n adalah koefisien x^n dalam $p(x)$ maka penyelesaian relasi rekursif yang dimaksud adalah

$$\boxed{a_n = -2 \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix} + 2^n + 3, \quad \text{untuk } n \geq 0}$$

7. $a_0 = 0$ dengan $a_n = a_{n-1} + 2^n$ untuk $n \geq 1$
Penyelesaian :
Misal $p(x)$ adalah FPB barisan a_n, maka menurut definisi

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Kalikan kedua ruas bagian relasi rekursif dengan x^n, kemudian jumlahkan kedua ruas untuk $n \geq 1$ dan diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n-1} + 2^n\right) x^n \\
\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) - a_0 &= x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n\right) - 1 \\
p(x) - 0 &= xp(x) + \frac{1}{1-2x} - 1 \\
(1-x)p(x) &= \frac{1-(1-2x)}{1-2x} \\
p(x) &= \frac{2x}{(1-x)(1-2x)} \\
p(x) &= -2\left(\frac{1}{1-x}\right) + 2\left(\frac{1}{1-2x}\right) \\
p(x) &= -2\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \\
p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-2 + 2^{n+1}\right) x^n
\end{aligned}$$

Karena a_n adalah koefisien x^n dalam $p(x)$ maka penyelesaian relasi rekursif yang dimaksud adalah

$$\boxed{a_n = -2 + 2^{n+1}, \quad \text{untuk } n \geq 0}$$

8. Misalkan a_n menyatakan banyaknya cara untuk menempatkan n objek berbeda di dalam 5 kotak. Tulis dan selesaikan relasi rekursif untuk a_n !
   Penyelesaian :
   Bingung :(hehe..